fórmules matemàtiques que apareixen a les pintures de la sèrie «Matemàrtica» aporten una altra dimensió, en aquest cas visual, a l'abstracció establerta pel simple codi matemàtic.

Alibau utilitza les matemàtiques com un material més, encara que fonamental, en una obra que vol anar més enllà de la pura i simple abstracció. La presència de signes matemàtics en aquestes obres reforça el concepte d'ordre, que és consubstancial tant a l'univers matemàtic com al de la personalitat creadora d'un artista tan excepcional com Salvador Alibau. La seva recerca d'absolut a través de la pintura és la recerca universal de l'ordre que abarca des dels neutrins fins al sistema solar.

Alibau ha escrit en el seu gran llibre que creu en «una bellesa matemàtica». Aquesta bellesa existeix. Els matemàtics purs i els artistes de vegades impurs la senten, aquesta bellesa (encara que no la puguin demostrar aristotèlicament). I ara em vénen al cap, a propòsit de la intervenció tan suggerent del professor Gendrau, dues obres mestres en els camps de la pintura i de la música, com són *Els gira-sols* de Van Gogh i la suite orquestral *Els planetes* de Gustav Holst.

Sebastià Xambó, el president de la Societat Catalana de Matemàtiques, que avui ens convoca, em deia l'altre dia que la primera motivació d'un matemàtic sol ser d'ordre estètic. Emocionant, esplèndid! Els matemàtics, com els artistes, teniu un sentit estètic molt acusat. Treballeu, de fet, en un univers molt abstracte. Però sentiu la intuïció de l'harmonia en les fórmules i en els resultats parcials que aneu obtenint en la vostra exploració.

El matemàtic sent que hi ha una harmonia per revelar i vol donar-li cos, vol fixar-la a la seva manera com a la seva manera vol fixar-la l'artista. És aquesta intuïció primordial, aquesta crida, allò que mou artistes i matemàtics a expressar l'inefable. I és aquest l'espai compartit on es troben artistes i matemàtics, l'espai comú de l'aspiració a la bellesa o a la veritat. A la Veritat, que ens diu, tant a la ment com al cor, que tota bellesa és matemàtica. I que l'harmonia és, sempre, una qüestió de proporcions. És a dir, una relació compensada entre les parts i el tot.

Relacions entre l'art i la matemàtica

A càrrec de: Joan Girbau

Crec que l'acte de creació matemàtica és una de les manifestacions més elevades de l'esperit humà. Encara que sigui molt difícil plasmar en una obra artística la grandesa d'aquesta activitat, qualsevol escriptor, pintor, escultor, artista en general, que aconsegueix traslladar a la seva obra una petita guspira d'allò que representa la creació matemàtica, comparteix amb els déus l'essència de la **Bellesa**.

Les matemàtiques i l'art han estat íntimament relacionats al llarg de la història. Podem parlar d'un flux que ha anat en dues direccions:

1. De les matemàtiques a l'art.
2. De l'art a les matemàtiques (i a altres ciències, com la física).

Sobre el flux en la primera direcció podem parlar de molts criteris estètics que s'han fonamentat en relacions matemàtiques. Per exemple, les proporcions del Partenó, basades en el nombre auri (al qual Alibau ha dedicat alguns quadres). Per exemple, altres proporcions usades per arquitectes del segle xx (Le Corbusier). Si parléssim de l'ús de figures geomètriques en l'art de tots els temps, necessitaríem com a mínim uns quants volums per descriure el més essencial del tema. La importància que han tingut les matemàtiques en el desenvolupament de les escales musicals (l'escala pitagòrica, l'escala temperada imposada per l'autoritat indiscutida de J. S. Bach) i en el desenvolupament de les músiques atonals (Schönberg) podria ser objecte d'un cicle complet de conferències.

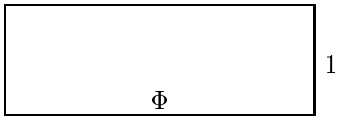
Tot això que acabem de dir és conegut (amb un grau de precisió més o menys gran) per moltíssima gent. Ara bé, sí crec que és més minoritària la percepció per part de la gent del

flux invers (de l'estètica cap a les matemàtiques i cap a la física). I aquesta influència ha existit sempre de manera molt forta. Jo diria que la totalitat d'investigadors en matemàtiques i en física teòrica estan fortament convençuts de l'harmonia interna de la seva ciència, i aquesta convicció els influeix en la intuïció de resultats nous. Quin investigador en matemàtiques no ha pensat mai que un determinat teorema havia de ser cert simplement per qüestió d'harmonia? O quin altre investigador no ha deixat córrer uns càlculs molt complicats perquè tenia la convicció que aquella no era la bona via, que les coses havien de ser més senzilles?

Vull il·lustrar aquesta ferma convicció que tenen els matemàtics i els físics teòrics en l'harmonia de les coses, amb l'exemple de Kepler. Les lleis de Kepler expliquen, com tots vosaltres sabeu, el moviment dels planetes, però res no ens diuen del perquè algunes òrbites són gairebé circulars (com la de Venus) i unes altres són fortament excèntriques (com la de Mercuri). Kepler, convençut de l'harmonia global de l'univers, va imaginar que cada planeta emetia un so de freqüència proporcional a la seva velocitat. Venus, l'òrbita del qual és gairebé circular, recorre la seva òrbita amb velocitat gairebé constant i, segons la idea de Kepler, emet un so sempre amb la mateixa freqüència (és a dir, sempre emet la mateixa nota). La Terra, que té excentricitat petita (encara que més gran que la de Venus), canvia lleugerament de velocitat al llarg de la seva òrbita i, segons la idea de Kepler, emet ja més d'una nota. Mercuri, que té una excentricitat molt gran, emet motes notes al llarg del seu viatge entorn del Sol. Per altra banda, com més a prop és un planeta del Sol, la seva velocitat és més ràpida i les notes que emet són més agudes. Els planetes allunyats del Sol emetrien —segons Kepler— notes molt greus. Kepler va traslladar a un pentagrama les notes que (segons aquesta teoria) cada planeta emet quan recorre la seva òrbita i va poder «escoltar» així la música que, segons ell, aquests emetien.

Permeteu-me ara que dediqui la resta del meu parlament de manera monogràfica a fer algunes consideracions sobre el nombre auri que Alibau pren com a inspiració d'alguns dels seus quadres.

El nombre auri. El nombre auri va ser concebut pels grecs com una «proporció perfecta» (gairebé màgica) entre dues magnituds. Imagineu dues longituds, una de gran i una altra de més petita. La relació entre la gran i la petita s'anomena *proporció àuria* si es compleix el següent: la longitud petita és a la gran com la gran és a la suma de les dues.



Si prenem la longitud petita com a unitat i si designem Φ la longitud gran, tindrem

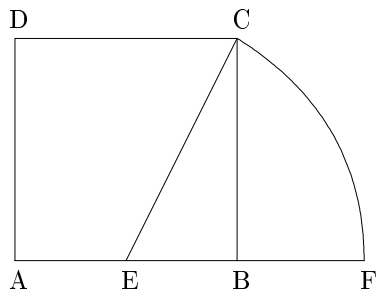
$$\frac{1}{\Phi} = \frac{\Phi}{\Phi + 1}\,.$$

D'aquí s'obté $\Phi + 1 = \Phi^2$. Si resolem aquesta equació de segon grau, obtenim

$$\Phi = \begin{cases} = (1+\sqrt{5})/2 \\ \\ = (1-\sqrt{5})/2 \end{cases}.$$

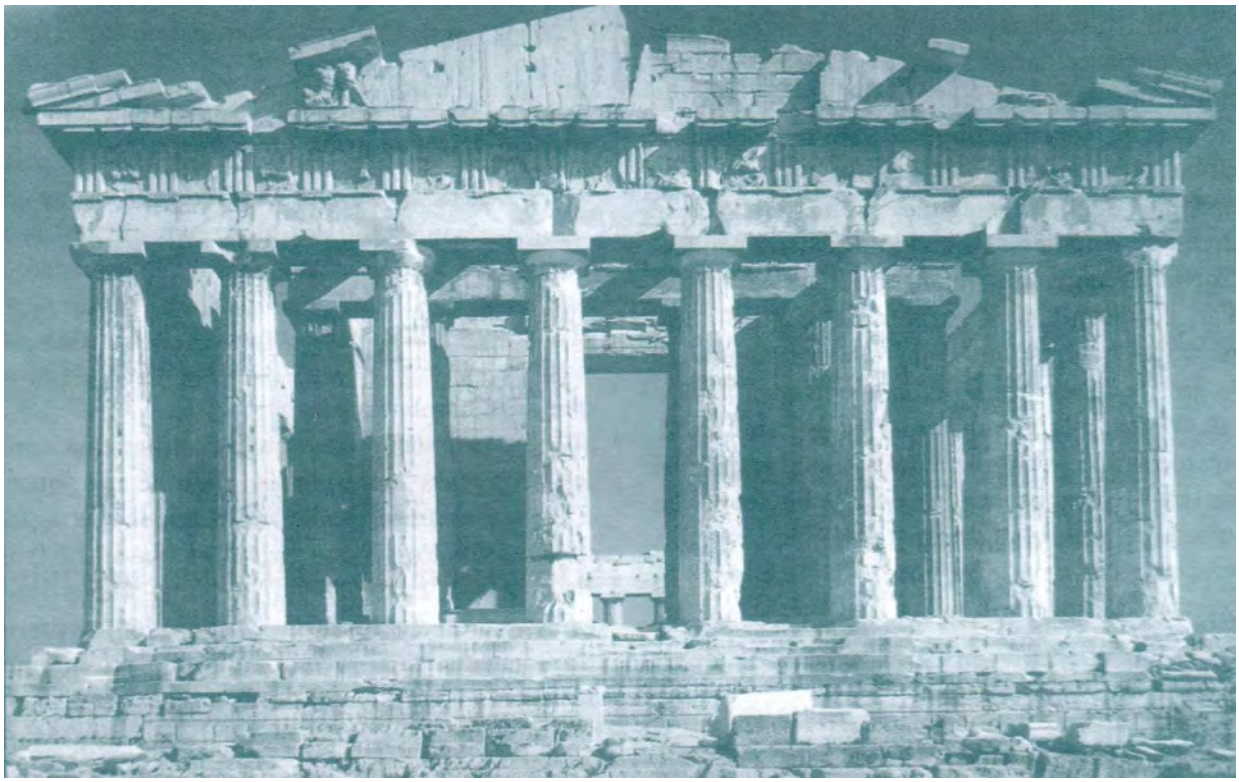
D'aquestes dues arrels només n'hi ha una de positiva, $\Phi = (1+\sqrt{5})/2 = 1,6180339887\ldots$, que és el nombre auri.

Si voleu sorprendre qualsevol persona amb les propietats meravelloses, gairebé màgiques, d'aquest nombre, podeu demanar-li que agafi una calculadora i que l'elevi al quadrat. Trobarà $\Phi^2 = 2,6180339887\ldots$, que té les mateixes xifres decimals que Φ. Si voleu sorprendre'l encara més, demaneu-li que trobi amb la calculadora l'invers de Φ. Obtindrà $1/\Phi = 0,6180339887\ldots$, que té també les mateixes xifres decimals que Φ. Un matemàtic no es deixa impressionar per aquests aparents miracles perquè el fet que Φ^2 i Φ tinguin les mateixes xifres decimals es desprèn de l'equació $\Phi^2 = \Phi + 1$ (la qual era conseqüència de la mateixa definició de Φ), i el fet que $1/\Phi$ tingui les mateixes xifres decimals que Φ es desprèn de la mateixa equació escrita d'una altra manera: $1/\Phi = \Phi - 1$.



Sembla que un nombre que té unes propietats tan màgiques s'hauria de poder construir geomètricament de manera senzilla. En efecte, així és. Prengueu un quadrat ABCD de costat unitat. Sigui E el punt mig del costat AB. Traceu la recta que uneix E amb el vèrtex C. Prengueu la longitud EC i amb un compàs porteu-la sobre la recta que passa per A i per B, a partir de E. Sigui, doncs, F el punt sobre la recta AB tal que la longitud de EF és igual a la longitud de EC i de manera que B està entre E i F. Llavors la longitud de AF és el nombre auri.

Els grecs van usar la proporció àuria en diverses obres arquitectòniques. Així, per exemple, la planta rectangular del Partenó té les proporcions del nombre auri, i la seva façana principal és també un rectangle de proporció àuria.



Partenó

La successió de Fibonacci. La successió $\{a_n\}$ de Fibonacci està definida per les condicions:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \\ a_1 = a_2 = 1 \end{cases} .$$

Així, doncs, la successió de Fibonacci és 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ... La successió de Fibonacci té unes propietats màgiques (gairebé tan màgiques com les que hem esmentat abans del nombre auri). Per exemple, donats quatre termes consecutius d'aquesta successió, a_n, a_{n+1}, a_{n+2} i a_{n+3}, comparem el producte dels dos del mig (a_{n+1} per a_{n+2}) amb el producte dels dos extrems (a_n per a_{n+3}). Femho explícitament per als primers valors de n.

- Per a $n = 1$, els termes són 1, 1, 2, 3. El producte dels dos del mig és $1 \times 2 = 2$, i el producte dels dos extrems és $1 \times 3 = 3$. Els dos productes es diferencien en una unitat. És més gran el producte dels dos extrems.

- Per a $n = 2$, els termes són 1, 2, 3, 5. El producte dels dos del mig és $2 \times 3 = 6$, i el producte dels dos extrems és $1 \times 5 = 5$. Els

dos productes es diferencien en una unitat. És més gran el producte dels dos del mig.

- Per a $n = 3$, els termes són 2, 3, 5, 8. El producte dels dos del mig és $3 \times 5 = 15$, i el producte dels dos extrems és $2 \times 8 = 16$. Els dos productes es diferencien en una unitat. És més gran el producte dels dos extrems.

- Per a $n = 4$, els termes són 3, 5, 8, 13. El producte dels dos del mig és $5 \times 8 = 40$, i el producte dels dos extrems és $3 \times 13 = 39$. Els dos productes es diferencien en una unitat. És més gran el producte dels dos del mig.

Sembla, doncs, que es compleix

$$\begin{cases} a_n a_{n+3} = a_{n+1}\, a_{n+2} + 1 \text{ si } n \text{ és senar.} \\ a_{n+1}\, a_{n+2} = a_n a_{n+3} + 1 \text{ si } n \text{ és parell.} \end{cases} \tag{1}$$

Aquest fet és sorprenent. Un matemàtic, però, intentarà sempre buscar una explicació o donar una demostració. A continuació donaré un argument senzill que demostrarà aquest fet per inducció. Agafem sis termes consecutius de la successió de Fibonacci. Si designem a i b els dos primers (dels sis consecutius que hem agafat), els sis termes seran

$$a\,,\ b\,,\ a+b\,,\ a+2b\,,\ 2a+3b\,,\ 3a+5b\,.$$

Agafem els quatre primers d'aquests termes. La diferència entre el producte d'extrems i el producte de mitjos serà

$$a(a+2b) - b(a+b) = \text{operant } = a^2 + ab - b^2\,.$$

Agafem ara els quatre últims termes (dels sis que considerem) i fem també la diferència entre el producte d'extrems i el producte de mitjos. Tindrem:

$$\begin{aligned}(a+b)(3a+5b) - (a+2b)(2a+3b) = \\ = \text{ operant } = a^2 + ab - b^2\,.\end{aligned}$$

Això demostra que a la successió de Fibonacci la diferència entre producte d'extrems i producte de mitjos de quatre termes consecutius a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3} no varia quan s'augmenta en dues unitats el subíndex n. Per tant, basta veure quan val aquesta diferència per a $n = 1$ i per a $n = 2$. Quan $n = 1$ aquesta diferència val 1, i quan $n = 2$ aquesta diferència val -1.

Considerem ara la successió de quocients $\{a_{n+1}/a_n\}$ de la successió de Fibonacci. És a dir, la successió 1/1, 2/1, 3/2, 5/3, 8/5, 13/8, 21/13, 34/21, 55/34, 89/55, 144/89, ... La condició $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ que serveix per definir la successió de Fibonacci es pot escriure

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{\frac{a_n}{a_{n-1}}}\quad . \tag{2}$$

Si la successió de quocients $\{a_{n+1}/a_n\}$ tingués límit, designant l aquest límit i prenent límits en la igualtat anterior, tindríem

$$l = 1 + \frac{1}{l}\quad ,$$

que ens diu que $l^2 = l + 1$, i (com que l hauria de ser positiu) l hauria de ser el nombre auri. Qualsevol matemàtic (treballant una mica) sabria demostrar que la successió $\{a_{n+1}/a_n\}$ té efectivament límit. L'argument que ara se m'acudeix a mi per provar això seria el següent: utilitzant (1) es pot veure de manera immediata que els termes parells de la successió $\{a_{n+1}/a_n\}$ formen una subsuccessió monòtona decreixent, i els termes imparells formen una subsuccessió monòtona creixent. Ambdues estan acotades i han de tenir límit. Per veure que cada una d'aquestes dues subsuccessions té per límit el nombre auri, reiterem dues vegades la fórmula (2) i obtenim

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}}\quad .$$

Prenent límits:

$$l = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1/l}}\quad ,$$

que operant dóna $l^2 = l + 1$, igual que abans.

Quins miracles de la matemàtica! Ara resulta que el límit de quocients de la successió de Fibonacci és la famosa raó àuria que els grecs havien introduït per fonamentar matemàticament alguns dels seus criteris estètics.

Els gira-sols i la successió de Fibonacci. Jo sempre havia cregut que la flor de gira-sol era una flor de veritat. Ho vaig comentar un dia a un meu amic biòleg i es va posar a riure de la meva ignorància. No, no i no! De cap manera! —em va dir—. L'anomenada flor de gira-sol no és una flor. És una **inflorescència**. Una inflorescència és un conjunt format per moltíssimes flors elementals, cada una de les quals té els seus pistils i els seus estams. D'aquestes flors

elementals, només les que estan situades a la vora d'aquest conjunt (de la inflorescència) tenen pètals (que són els pètals grans que nosaltres veiem i que donen al conjunt l'aspecte d'una flor). Les flors elementals que no estan situades a la vora no tenen pètals (però sí pistils i estams). Aquestes flors elementals —minúscules— estan disposades en braços que parteixen del centre de la inflorescència, cada un dels quals té forma d'espiral. El nombre d'aquests braços és variable. Depèn de les condicions amb què la planta s'ha desenvolupat (adob del sòl, condicions climàtiques, etc). Ara bé, el nombre d'aquests braços és sempre un nombre de la successió de Fibonacci (21, 34, 55, 89, etc). Això és veritablement meravellós. Ves per on el Partenó i els gira-sols estan estretament relacionats (nombre auri i successió de Fibonacci)! Per profunditzar més sobre la relació entre el nombre de braços espirals del gira-sol i la successió de Fibonacci podeu consultar l'article de Stéphane Douady titulat «Creciendo en orden», publicat al llibre *Fotografiando las Matemáticas* de Carroggio S.A. de Ediciones, Barcelona 2000. Aquí trobareu bibliografia sobre el tema.

Gira-sol als camps de Provença